



TITLE:

# 18世紀前半における力学の発展と 流体力学の誕生 (オイラー方程式の 数理 : 力学と変分原理250年)

AUTHOR(S):

伊藤, 和行

---

CITATION:

伊藤, 和行. 18世紀前半における力学の発展と流体力学の誕生 (オイラー方程式の数理 : 力学と変分原理250年). 数理解析研究所講究録 2011, 1749: 1-15

ISSUE DATE:

2011-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171109>

RIGHT:

## 18 世紀前半における力学の発展と流体力学の誕生

京都大学大学院文学研究科 伊藤 和行 (Kazuyuki Ito)

Graduate School of Letters,

Kyoto University

### 1. 序

力学は近代科学の中でも最初に誕生した分野であり、これまで様々な歴史的研究がなされてきたが、その焦点は主として 17 世紀科学革命期、とりわけガリレオやホイヘンス、ニュートンらの研究に向けられてきた。しかし近年の研究は、ニュートンの『プリンキピア』の力学がけっして我々の馴染んでいるものではなく、そのような姿が現われるのは 18 世紀以降だったことを明らかにしている<sup>1</sup>。実際『プリンキピア』では微積分は用いられず、すべて幾何学の形式で議論が展開されていたことが知られている。17 世紀末から 18 世紀中頃にかけて、力学理論の解析化・代数化が進められ、運動量、角運動量、エネルギーといった力学量の保存法則が提唱され、運動方程式が定式化されたのである<sup>2</sup>。

また 18 世紀には、力学の考察対象が質点から質点系にすなわち剛体や流体といった連続体に拡張され、力学理論がそれらにも適用されるようになっていった。流体の運動も、剛体の回転運動や弦の振動といったテーマとともに、この時期に力学理論の考察対象となったのである。18 世紀中頃までには、最初の基本法則といわれる「ベルヌーイの定理」が提唱され、次いで「オイラーの運動方程式」と「ラグランジュの運動方程式」が定式化され、近代流体力学が誕生したと言われる。

本稿では、前半で 18 世紀前半の力学理論の展開を概観し、後半ではベルヌーイ親子を中心に流体力学理論の誕生過程を検討する。

### 2. 18 世紀前半における力学理論の発展

近代古典力学の出発点は、言うまでもなくニュートンの『プリンキピア』だったが、そこでの加速運動の考察は、けっして現代の「ニュートン力学」におけるよう

<sup>1</sup>18 世紀の力学に関する研究としては、Blay1992; Guicciardini1999; Maltese2001; Maltese1992; Truesdell1968; 山本 1997。

<sup>2</sup>Grattan-Guinness は、18 世紀の力学の発展において、以下の三つの伝統があったことを指摘している。1: 中心力に重点を置き、ニュートンの逆二乗引力の原理と三つの法則に基づくアプローチ、2: エネルギーの保存と、その仕事との互換を第一位のものとしようとするアプローチ、3: 最小作用の原理、ダランベールの原理、仮想仕事の原理といった原理にを用いる代数的な形式。See Grattan-Guinness2000, p. 242.

に、適切な座標系を置き運動方程式を立てて解くといったようなものではなかった<sup>3</sup>。ニュートンは、外力を被る物体の加速運動を扱うに際して、ガリレオの落下運動を理論的な出発点にしていた。ガリレオの落下運動は外力が一定である加速運動に他ならないが、外力が時間とともに変化する一般的な場合でも、微小時間においては外力は一定とみなされ、その範囲ではガリレオの落下法則が成り立ち、微小時間内での通過距離は通過時間の二乗に比例すると考えるのである。中心力の作用下の物体の運動を論じた際には、微小時間内における物体の軌道の接線からの逸脱を落下運動とみなし、その逸脱距離は中心力と時間の二乗に比例すると考えることから、中心力の大きさを幾何学的に求めている。

『プリンキピア』以後、大陸の数学者たちは、幾何学的形式で展開されていたニュートンの理論を、ライプニッツ流の微積分に書き換えることを勧めていった<sup>4</sup>。その最初の試みは、ヴァリニオン (Pierre Varignon, 1654-1722) であり、1690年代以降、一連の論文においてこの問題を扱っている。「力、速度、距離、時間を決定するための一般的方法」(1700)<sup>5</sup>では、運動方程式の最初の定式化とみなせる試みを行なった。距離を  $x$ 、時間を  $t$ 、速度を  $v$ 、加速力 (力を質量で割ったものに相当する) を  $y$  とすると、次の式が成り立つ。

$$1.v = \frac{dx}{dt}, \quad 2.y = \frac{dv}{dt} \left( \frac{ddx}{dt^2} \right)$$

このヴァリニオンの「運動方程式」は、1710年代には惑星運動の問題へ適用されている。当時問題となっていたのは、『プリンキピア』においては、万有引力の法則からケプラーの惑星運動の法則が導かれるのではなく、反対にケプラーの法則から万有引力が導かれていたことである。まず第二法則 (面積速度一定の法則) が成立するときには、惑星に働く力は中心力であることを示し、さらに第一法則 (楕円軌道の法則) から中心力は距離の二乗に反比例することを導いたのだった。これは「順問題」と呼ばれ、それに対して万有の法則からケプラーの法則を導くこと、すなわち「逆問題」が問題となった<sup>6</sup>。1710年代以降、ヤコブ・ヘルマンやヨハン・ベルヌーイといった学者たちは、ヴァリニオンの「運動方程式」を用いてこの問題に挑戦していった。

<sup>3</sup>本節の記述は伊藤 2006 の前半部分をまとめたものである。『プリンキピア』の内容に関しては、Densmore2003; Cohen1999 を参照。

<sup>4</sup>当時の『プリンキピア』への反応に関しては、Guicciardini1999。

<sup>5</sup>Varignon, "Manière générale de déterminer les forces, les vitesses, les espaces, et les tems", *Mémoires de l'académie royale des sciences de Paris*, 30 Janvier 1700 (1703), pp.22-27. ヴァリニオンの力学に関しては、Blay 1992。

<sup>6</sup>「逆問題」に関しては、Aiton1998; Guicciardini1995。

## 2.1 「活力」の保存

「活力」(vis viva) の概念はエネルギー概念の先駆とみなされるが、この概念をめぐって18世紀前半に繰り広げられた「活力論争」はよく知られている。この論争は、運動物体が持っている「力」の尺度は何か、また保存されている量は何かをめぐるものであって、デカルト派は「運動量」を、一方ライプニッツ派は「活力」を主張した。「運動量」は速度に比例し、一方「活力」は速度の二乗に比例する。この議論は、力学上の問題であるとともに哲学的な色彩を帯びたものでもあった<sup>7</sup>。「活力」という言葉を最初に主張したのはライプニッツだったが、その保存法則の起源は直接的にはホイヘンスにあり、またガリレオにその先駆を見出すことも可能である。ホイヘンスは、『振子時計』(1673)において物理振子の周期を求める際に、それを複数の物体から構成されているとし、振子が最下点に到達したときに、それらの物体の結合が切れて、各々が、そのときに獲得していた速度でもって自由に上昇するとすれば、それらの重心は、最初の重心と同じ高さまで昇ると考えている<sup>8</sup>。一方ガリレオは、『新科学論議』(1638)において、振子の運動においても同様に、振子がある高さから運動を始めて最下点に到達したときに獲得される速度でもって、その振子は、その長さが異なるようにさせられたとしても、同じ高さまで上昇すると述べている。また、ある斜面を下降した物体は、その際に獲得した速度でもって、傾きが異なる斜面上を同じ高さまで上昇することができるだろうと考えていた<sup>9</sup>。

ヨハン・ベルヌーイ (Johann Bernoulli, 1667-1748) は、18世紀初頭における「活力」の代表的な支持者であり、「運動伝達の法則に関する論考」“Discours sur les loix de la communication du mouvement”, 1727) ではその定式化を試み、「加速のよく知られた法則」すなわちヴァリニョンの「運動方程式」から「活力」の式を導いている。距離を  $x$ 、時間を  $t$ 、速度を  $v$ 、圧力を  $p$  (単位質量あたりに加わる力) とすると、「加速のよく知られた法則」とは  $dv = p dt$  である。一方微小距離  $dx$  と微小時間  $dt$  の間には  $dx = v dt$  すなわち  $dt = \frac{dx}{v}$  という関係があるので、 $dv = p dt$  に代入して、 $dv = p \frac{dx}{v}$  となる。これより「活力」の式  $v dv = p dx$  が導かれる。実際、両辺を積分すると、 $\frac{1}{2} v^2 = \int p dx$  という関係式が導かれる<sup>10</sup>。

ヨハンの息子のダニエル・ベルヌーイ (Daniel Bernoulli, 1700-1782) は「活力」の保存を力学の基本法則として積極的に用いている。彼の名前は、流体力学史においては、父とともに「ベルヌーイの定理」の発見者として知られるが、また角運動量

<sup>7</sup> 「活力論争」に関しては、有賀 2009。

<sup>8</sup> 広重徹 1968, pp.69-71。

<sup>9</sup> ガリレオ 1985, p.245-247。

<sup>10</sup> J.Bernoulli 1727, p.47。

の保存則の発見者の一人といわれる。彼は、流体の運動の考察に際しても「活力」の保存法則を基礎原理として議論を進めていた。

ダニエルは初期の論文「力学の諸原理の検討と、力の合成と分解についての幾何学的証明」(“*Examen principiorum mechanicae, et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium*”, 1726)において、「運動方程式」と「活力」の関係について興味深い考察をしている<sup>11</sup>。この論文は力学の基礎原理をテーマとしており、最初に二つの「原理」が提示されている。第一の原理は「力の合成と分解」という静力学的なものであり、これは「必然的に真」なものとみなされ、幾何学的な証明によって幾何学に劣らない明証性を与えることがこの論文の目的だった。一方第二の原理とは、速度の増分は、時間要素と力の積に比例するという動力学的なものであって、これをダニエルは「ガリレイの原理」(*principium Galileanum*)と呼んでいる。この第二の原理は第一の原理と異なり、「偶然的に真」なものであって、その正しさは経験的にしか示され得ない。彼によれば、時間  $t$ 、力  $p$  (力を物体の質量で割ったもの  $m/f$  を表わしている)、速度  $v$  の間の関係は、通常認められている  $dv = p dt$  だけでなく、 $dv = p p dt$  や  $dv = p^3 dt$  であることも可能なのである。ダニエルは、この「原理」が動力学の基礎であることを明言しているが、その一方でニュートン、そして彼の運動法則への言及はなく、その名称のとおりガリレオにその起源を見出しているのである。

さらにダニエルは、「活力」が力に比例することを「ガリレイの原理」すなわち  $dv = p dt$  から導出する。この導出は父であるヨハン・ベルヌーイによってすでになされていることを彼は指摘し、ヨハンに倣って、バネを用いた実験によって「活力」と力の比例性を説明した後で、次のように導く。時間  $dt$  における通過距離を  $dx$  とすると、 $dx = v dt$  であるから  $dv = p dt = \frac{p dx}{v}$ 、よって  $v dv = p dx$ 、すなわち  $vv = 2 \int p dx$  となる。

この「ガリレイの原理」と「活力」の関係について、ダニエルは、のちに論文「ある種の力学法則について」(“*De legibus quibusdam mechanicis*”, 1736)において論じ、そこではそれら二つの「原理」は同じものであると主張している<sup>12</sup>。「ガリレイの原理」における  $p dt$  (ここでは  $p$  は力を表わしている) は「時間的力」と呼ばれ、 $m dv = p dt$ 、 $m v = \int p dt$  の関係が成り立つとされる。一方「活力」の量は  $\frac{1}{2} m v v = \int p dx$  と表され、その要素である力と微小距離の積は「空間的力」と呼ばれる。第1の「原理」は質量と速度の積すなわち「運動の量」を対象とし、第2の「原理」は質量と速度の平方の積すなわち「活力」を対象としているが、ともに同一のことを表しているのである。ダニエル自身は18世紀前半になされた活力論争に関わることを避け、流水

<sup>11</sup>D.Bernoulli 1726.

<sup>12</sup>D.Bernoulli 1736.

の運動を論じた『動水学』においては、「活力」という言葉は哲学的に特別な意味を持っているので、「活力の保存」の代わりに「可能的上昇と現実的下降の等値性」(“*aequalitas inter descensum actuaalem ascensumque potentialem*”)という新しい表現を提案している<sup>13</sup>。「現実的下降」とは、系を構成する個々の粒子が落下運動をして静止した後で、重心が下降した垂直な高さである。一方「可能的上昇」とは、個々の粒子の速度の向きを上方に反転させて上昇させるときに、重心が到達するはずの垂直な高さである。後者は、系を構成する各部分の「活力」の総和を、系全体の質量で割ったものに他ならない。このダニエルの考えは、ホイヘンスの議論を踏襲するものだった。この「可能的上昇と現実的下降の等値性」は、『動力学』第三章において、大きな容器に結びつけられた道管中の水の速度を求める際に用いられている<sup>14</sup>。このようにダニエルにとって「活力の保存」定理はもっとも重要な力学の基本原則であったのである。

## 2.2 「運動方程式」の成立

ダニエル・ベルヌーイは、「ガリレイの原理」すなわち「運動方程式」は「偶然的に真」なものとみなしていたが、それに対してレオンハルト・オイラー (Leonhard Euler, 1707-1783) は必然的に真であると主張した。彼は、初期の著作『力学すなわち解析的に示された運動の科学』(*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, 1736)において、代数的に表現された「運動方程式」を導出し、加速運動における速度と力の関係を解析的に扱っている<sup>15</sup>。そこでは、ニュートンに倣って微小時間における落下法則を出発点とし、それを一般的な場合に拡張することによって「運動方程式」 $dv \propto p dt$ が導出される。その際にダニエルの主張へ反論して「運動方程式」が必然的なものであることを証明しようと試みているが、彼の議論は落下法則に基づいており、その必然性が証明できておらず、証明と認めることはできないものだった<sup>16</sup>。オイラーは、運動方程式  $mdv = p dt$  を導いた後、それを一次元の運動の問題に適用するに当たっては、わざわざ速度と距離の微分量の関係式に変形している。すなわち両辺に  $v$  を掛けて、 $mv dv = p \cdot v dt$  とし、 $dx = v dt$  より、 $mv dv = p dx$  すなわち  $d(\frac{1}{2}mv^2) = p dx$  とするのである<sup>17</sup>。この式が実際に問題を解く際に用いられたものであり、 $v$  の代わりに  $v^2$  が速度を表わし、「運動方程式」は最終的には速度の二乗と距離との一次の微分方程式という形式を取っていた。また二次元の問題にお

<sup>13</sup>D.Bernoulli 1738, p.108; 英語訳 Bernoulli 1968, p.12.

<sup>14</sup>D.Bernoulli 1738, pp.132-134; 英語訳 Bernoulli 1968, pp.35-37.

<sup>15</sup>オイラーにおける「運動方程式」に関しては、伊藤 2006 を参照。

<sup>16</sup>Euler 1736, pp.49-50.

<sup>17</sup>Euler 1736, p.76.

いては、物体に働く力は、運動の接線方向と法線方向に分けて考えるというホイヘンス以来の方法に従っていた。このように『力学』におけるオイラーの方法は我々のものとは大きく異なっていた。

我々が親しんでいる「運動方程式」、すなわち空間に固定された座標系（直交座標あるいは球座標）の各座標に対する時間の二階微分方程式をオイラーが本格的に用い始めたのは1740年代後半のことである。彼は、惑星の運動を論じた「天体の運動一般に関する研究」（“Recherches sur le mouvement des corps celestes en general”, 1747）において、空間に固定された直交座標系を導入し、その各座標に対して運動方程式を提示する。各座標を  $(x, y, z)$ 、力の各成分を  $(X, Y, Z)$ 、物体の質量を  $M$  とするとき、運動方程式は次のようになる、

$$\text{I. } \frac{2ddx}{dt^2} = \frac{X}{M}, \quad \text{II. } \frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Y}{M}, \quad \text{III. } \frac{2ddz}{dt^2} = \frac{Z}{M}^{18}$$

上の関係式は、従来の一階の「運動方程式」 $du = p dt$ （ $u$ ：速度、 $p$ ：加速力）から導出されている。すなわち通距離の要素を  $ds$  とすると、 $u = \frac{ds}{dt}$  より  $du = \frac{dds}{dt}$  であるから、 $\frac{dds}{dt^2} = p$  となるのである<sup>19</sup>。

さらにオイラーは、惑星の運動を論じるために、極座標（ $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ ）を導入し、中心力が  $V$  であるとして、極座標系での運動方程式を導出している。

$$\text{I. } 2drd\phi + rdd\phi = 0$$

$$\text{II. } ddr - rd\phi^2 = \frac{1}{2}Vdt^2^{20}.$$

以上のようなオイラーの試みは画期的なものと言えようが、その革新性は何よりも空間に固定された座標系の導入にあったと言えよう。オイラーは1750年代に入ると、この座標系と「運動方程式」を基本原理として、剛体や流体といった連続体の運動に関して我々の馴染みのある基本方程式を導出していった。

### 3. 18世紀における流体力学の誕生

#### 3.1 17世紀から18世紀へ

流体の力学は、まず水に関する力学として登場した。そのことは、「水の静力学」（「静水学」hydrostatica）と「水の動力学」（「動水学」hydrodynamica）という言葉

<sup>18</sup>Euler1747, p.9.

<sup>19</sup>Euler1747, p.10. 係数2について何も説明はなされていないが、これは彼が用いた特殊な単位系のためである。

<sup>20</sup>Euler1747, p.14.

に表われており、治水に関わる総合的な学問・技術を表わすものとして「水理学」(hydraulica)という言葉も用いられていた<sup>21</sup>。「静水学」の理論的法則として古代以来知られていたのは「アルキメデスの浮体法則」だったが、17世紀における重要な成果としては、水の圧力に関する「パスカルの定理」の発見がある。それによれば、水が容器の壁に及ぼす力は壁に垂直であり、圧力(単位体積あたりに働く力)はすべて等しい。この法則は、流体が及ぼす力を論じる際にはつねに理論的考察の出発点となった。

「動水学」すなわち流体の動力学は、ガリレオの弟子であるカステッリやトリチェリによって誕生した。カステッリ(Benedetto Castelli, 1578-1643)は、『流水の尺度について』(*Della misura dell' acque correnti*, 1628)において、流水の速度と断面積の関係を論じ、両者は反比例することを指摘した。これは「連続の法則」に他ならず、流体力学の最初の一步が記されたといえよう<sup>22</sup>。またトリチェリ(Evangelista Torricelli)は、大きな容器の底部から水平方向に噴出する水の速度が容器内の水の高さの平方根に比例することを主張した。この「トリチェリの法則」の信憑性は以後大きな問題となり、確証実験が行なわれるとともに、その理論的説明をニュートンも『プリンキピア』の中で試みており、18世紀に入っても主要な問題だった<sup>23</sup>。

### 3.2 ダニエル・ベルヌーイー「活力」の保存

近代流体力学の最初の基本法則として知られるのは、ベルヌーイ親子によって発見された「ベルヌーイの定理」である。これは、「トリチェリの法則」を発展させたものと言ってよく、大きな容器に接続された道管が水が噴出するときの、容器中の水の高さ、噴出する流水の速度、流水が道管の壁に及ぼす圧力の関係を与えている。この定理を最初に述べたのは息子のダニエル・ベルヌーイであり、著作『動水学』(*Hydrodynamica*, 1736)においてであった。一方彼の父であるヨハン・ベルヌーイは、その著作のすぐ後に刊行した『水力学』(*Hydraulica*, 1742)において、息子とは異なる解法を示し、自らの先取権を主張した。ヨハンは、自らの著作を息子ダニエルの『動水学』の出版よりも先に執筆したと述べているが、実際にはその後であったことが知られている。

ダニエルの『動水学』は、道管の中の水の平衡と圧力から、流水の速度、孔から噴出する流水の速度と、流水が道管の壁に与える圧力、圧縮性のある空気の道管中の

<sup>21</sup>近代初期の流体力学に関する研究としては、Truesdell1954; 1955; Blay2007; Calero2008。また流体力学の通史としては、Tokaty1994; Darrigol2005。

<sup>22</sup>羽片1995; Maffioli1994。

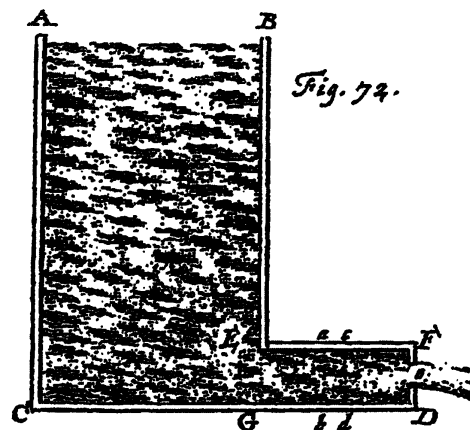
<sup>23</sup>Calero2008, pp.268-282。もう一つの主要な問題は、ニュートンが『プリンキピア』第二巻で論じていた、流体中を運動する物体が流体から被る抵抗に関するものである。Ibid. pp.73-114



振る舞い、流水が、その運動を妨げる板に対して及ぼす圧力といった、道管中の水の振る舞いに関わる静力学問題と動力学的問題を扱っている。(内容に関しては、表を参照) 彼の考察の基本的前提となっているのは、「層」という考えと「活力」の保存法則である。「層」とは、流水を、その運動の進行方向に対して垂直な面で切って作られるものであり、とくに「層」の厚さを非常に薄いものとみなすことによって微小量間の関係式を見出していた。

ダニエルが「ベルヌーイの定理」を導出しているのは、道管に端にある孔から水が噴出する際に流水が道管に及ぼす圧力を論じた第12章においてである。そこでは次のように問題が設定されていた。

非常に幅の広い容器 ACEB に、円柱状の水平の道管 ED が付けられており、容器はつねに水で満たされているとする。道管の端には孔  $o$  が開けてあり、そこから水が一樣速度で流出しているときの、道管 ED の壁に対する圧力を求めること<sup>24</sup>。



大きな容器中の水の表面 AB の孔  $a$  からの高さを  $a$  とすると、 $o$  での流出する水の速度は一樣で  $\sqrt{a}$  に等しい(「トリチェリの法則」による)。このとき道管と孔の面積の比を  $\frac{n}{1}$  とすると、導管中の水の速度は  $\frac{\sqrt{a}}{n}$  となる(「カステッリの法則」による)。よって、もし底  $FD$  がないとしたならば、管中の水の最終速度は  $\sqrt{a}$  である。管中の水はより速い運動を行なおうとするが、付けられた底  $FD$  によって妨げられて壁に圧力を及ぼす。この圧力は加速あるいは速度の増加分に比例する。ここでダニエルは、「ガリレイの原理」すなわち圧力と加速の比例関係を用いる。これより問題は以下のようなものに変えられる。

水流が  $o$  を通る間に、管  $ED$  がある瞬間に  $cd$  において壊されたとしたとき、見合うの体積要素  $abcd$  が得るであろう加速の大きさを求めること<sup>25</sup>。

ここで管の壁で取られた小部分  $ac$  が流水から受ける圧力はこの加速に対応している。具体的な問題の解法は、容器  $ABEcdC$  を考え、孔に近い水の小部分が速度  $\frac{\sqrt{a}}{n}$  を持つとき、その小部分の加速を求めることである。容器  $ABEcdC$  内での運動を考え、管  $Ed$  内での速度を  $v$ 、管の断面積を  $n$ 、長さを  $Ec = c$  とし、さらに水の小部分の長さを  $ac$  として無限小  $dx$  で表わす。

<sup>24</sup>D.Bernoulli 1736, p.376; Bernoulli, pp.291-292.

<sup>25</sup>D.Bernoulli 1736, p.376; Bernoulli, p.292.

そのために「可能的上昇」すなわち水の「活力」の増分と「現実的下降」の増分を求める。前者の「活力」の増分は二つの要素からなり、第一の要素は、体積要素  $acdb$  が放出される同じ瞬間に  $E$  から管に入ってくる等しい要素  $ndx$  が持つことになる「活力」である。水の比重は 1 とされているので、体積要素の質量も  $ndx$  であり、それは、管に入る間に速度  $v$  と「活力」  $nvvdx$  を獲得する。容器  $AE$  が無限に大きいので管に入る前は、この要素の運動はないので、この「活力」は新しく生じたものである。この  $nvvdx$  が「活力」の増分の第一の要素である。第二の要素は、体積要素  $ad$  が流出する間に、 $Eb$  にある水が受け取る「活力」の増分  $2ncv dv$  である。これら二つの要素の和  $nvvdx + 2ncv dv$  が「可能的上昇」の増分となる。一方「現実的下降」は、体積要素  $ndx$  が高さ  $BE$  すなわち  $a$  だけ落下することによるので  $nadx$  となり、よって  $nvvdx + 2ncv dv = nadx$  すなわち  $\frac{v dv}{dx} = \frac{a - vv}{2c}$  が導かれる。

この「活力の保存」による関係式から、水が壁に及ぼす圧力を求めるには、「ガリレイの原理」すなわち「運動方程式」が用いられる。「あらゆる運動において速度の増加分  $dv$  は、圧力に微分時間  $\frac{dx}{v}$  ( $= dt$ ) を掛けたものに比例」<sup>26</sup>するので、この場合には、体積要素  $ad$  が被る圧力は  $\frac{v dv}{dx}$  すなわち  $\frac{a - vv}{2c}$  に比例することになる。

管が壊れる瞬間の水の速度は  $v = \frac{\sqrt{a}}{n}$  すなわち  $vv = \frac{a}{nn}$  であるから、この値を  $\frac{a - vv}{2c}$  に代入すると、 $\frac{nn - 1}{2nnc} a$  となる。これに、管の部分  $ac$  に対する水の圧力が比例する。ここで  $n$  が 1 に対して非常に大きい場合を考えると、先の値は  $(1 - \frac{1}{nn}) \frac{a}{2c}$  であるから、 $\frac{a}{2c}$  となる。これは、すなわち孔の大きさが非常に小さい場合すなわち孔がない場合であり、高さ  $a$  水による圧力が働いている。このときの圧力を  $a$  とすると ( $2c = 1$  とする)、他の場合の圧力は  $\frac{nn - 1}{nn} a$  となる。

以上の考察においてダニエルが最終的に導いている式は、通常の「ベルヌーイの定理」とは異なった形をしているが、これは、最終的な変数として二つの導管の断面積の比  $n$  が取られていることによる。実際、途中の式においては、圧力は  $\frac{a - vv}{2c}$  と比例するとなっている。これに  $2c = 1$  を代入すると  $a - vv$  となる。ここで  $a$  は位置エネルギーを、 $vv$  は運動エネルギーを表わしているので、我々が馴染んでいる  $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + p = \text{constant}$  に対応したものになる<sup>27</sup>。

<sup>26</sup>D. Bernoulli 1736, p. 377; Bernoulli, p. 293.

<sup>27</sup>我々が馴染んでいる形式のものは、のちにラグランジュが、オイラー方程式から導いたものが最初であることが指摘されている。

### 3.3 ヨハン・ベルヌーイー流体力学の解析化へ向けて

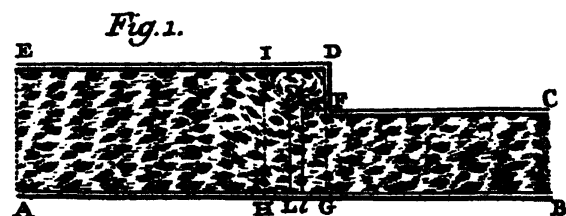
ダニエルは「活力保存」の法則を理論的基礎として理論的考察を進め、圧力が関わる場合には「ガリレイの原理」を適用することによって問題を解いていた。これに対して、父ヨハンは『水力学』において「活力保存」の法則を用いず、運動方程式を議論の中心に据えることによって同様の関係式を導いている。このヨハンの方法はオイラーの称賛を勝ち得ており、のちのオイラーのアプローチを予見させるものだった<sup>28</sup>。

『水力学』は、様々な形状の容器や管を流れる水の運動に関して、「活力の保存」という間接的な基礎によらずに、「純粹に力学的に原理から直接的に導出かつ論証」された理論を提出することを目的にしているが、その「動力学的原理」(principia dynamica) とは、加速と力の関係すなわち「運動方程式」に他ならない。

以上のことから、以下の規則が得られる：物体によって通過される距離を  $m$ ；推し進められる物体の質量を  $m$ ；通過される距離の範囲における起動力を  $p$ ；獲得された速さを  $v$ ； $x$  の通過時間を  $t$  とすると；これより  $dt = \frac{dx}{v}$ ； $\frac{pdt}{m}$  となり、すなわち  $\frac{pdx}{mv} = dv$ ；よって  $\int pdx = \frac{1}{2}mvv$ 、これはよく知られていることである。<sup>29</sup>

最後の式は「活力」に関するものであるが、ヨハンはこの「活力の保存」の式を、ダニエルのように基本原理として用いることなく議論を展開する。ヨハンによる「ベルヌーイの定理」の導出手順は以下の通りである<sup>30</sup>。

導管  $ABCFDE$  は二つの導管  $AGDE$  と  $GBCF$  からなり、前者の底  $GD$  は、その開口部  $GF$  でもって小さな導管  $BF$  に繋がっている。導管  $BE$  全体は重さを持たない一様な液体によって



満たされており、開口部  $AE$  の側から「起動力」 $p$  でもって押されている。問題は、導管を通して流れる液体が従う「加速の法則」(lex accelerationis) を求めるというものである。

第一に、静水学より、液体の面  $AE$  に働く力  $p$  は管  $BF$  の面  $GF$  に伝えられる。第二に、液体が第一の管から第二の管へ進むとき、その速度は管の断面積に反比例するように変化する。したがって液体は  $GF$  の手前で近づくにつれて加速される。

<sup>28</sup> ヨハンによる「ベルヌーイの定理」の導出に関しては、伊藤 2010 を参照。

<sup>29</sup> J. Bernoulli 1742, p. 395.

<sup>30</sup> Ibid., pp. 400-402.

ヨハンは、水が加速される「層」すなわち小部分  $LMlm$  に関する運動方程式を求め、それを加速区間に関して積分する。横軸として  $HL = t$ 、その要素として  $Ll = dt$ 、また縦軸として  $LM = y$  を取る。管  $HE$  の断面積を  $AE$  すなわち  $HI = h$ 、管  $GC$  の断面積を  $BC$  すなわち  $GF = m$ 、 $GC$  内の速度を  $v$  とする。すると管  $HE$  内の速度はその断面積に反比例するので  $\frac{m}{h}v$  となる。同様に加速部分にある  $LMlm$  の速度は  $\frac{m}{y}v$  となるが、それを  $u$  とする。

このときに、液体の「層」 $Lm$  に働く「加速力」 $\gamma$  は、 $\gamma dx = udu$  より、 $\gamma y dx = y u du$  となる。液体の比重を 1 とするので、液体の部分  $LMlm$  の体積  $y dx$  はその質量となるから、 $\gamma y dx$  は「加速力」と質量との積すなわち「起動力」となる。ゆえに右辺  $y u du$  はそこに働く「起動力」を与える。

静水学の理論より、「層」 $Lm$  に働く圧力は断面  $AE$  に働く圧力に等しいので、両者に働く「起動力」の比は、それらの断面積の比  $LM$  対  $HI$  すなわち  $y$  対  $h$  に等しくなければならない。「層」 $Lm$  に働く「起動力」は  $y u du$  であるから、断面  $AE$  に働く「起動力」は  $h u du$  となる。この  $h u du$  を加速部分全体に対して積分すると、 $\int_{\frac{m}{h}v}^v h u du$  より、 $\frac{1}{2}h(vv - \frac{mm}{hh}vv)$  すなわち  $\frac{hh - mm}{2h}vv$ 。これが流体を加速するのに必要な、管  $HI$  における「起動力」である。

この結果は、管  $HE$  に圧力  $p$  が加わっている場合なので、ダニエルの求めた結果と比較するには、速度  $v$  が高さ  $a$  の水によるものとして  $\frac{1}{2}v^2 = a$  とすればよい（重力定数  $g = 1$  とする）。またダニエルの場合には  $n = \frac{h}{m}$  だったので、それらを代入すると、 $\frac{hh - mm}{2h}vv = \frac{hh - mm}{hh}a = (1 - nn)a$  となる。これを断面積  $h$  で割って、圧力は  $\frac{h}{2}(1 - nn)a$  である。

以上のようなヨハンの導出方法は、たしかにダニエルの「活力の保存」による方法と異なっているが、その一方では我々の馴染んでいる解法とも違うものである。その主なる理由は、座標系が導入されていないことと、用いられている「運動方程式」の形式が我々の馴染んでいるものとは異なっている点にあり、それらは 1750 年代のオイラーの論文において大きく変わることになる。

### 3.4. オイラー—近代流体力学の誕生

オイラーが 1740 年代後半に、空間固定座標系に関する運動方程式の定式化をなし遂げ、惑星の運動に適用したことは先に触れたが、1750 年代にはこの手法を流体の運動に適用し、「オイラーの方程式」を導出している。この時期の流体力学の研究としては、三部作「流体の平衡状態に関する一般的原理」(“Principes généraux de

l'état d'équilibre des fluides", 1757), 「流体の運動に関する一般的原理」 ("Principes généraux du mouvement des fluides", 1757), 「流体の運動の理論に関する研究続篇」 ("Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides", 1757) が知られており, 「流体の運動に関する一般的原理」では, 連続の方程式や「オイラーの方程式」が導出されている<sup>31</sup>. それらの方程式の導出は, 流体中の微小平行六面体 (長方形) に着目することによってなされた. 空間に固定された座標系を設定し, 平行六面体の座標を  $(x, y, z)$ , 速度を  $(u, v, w)$ , それに働く力の成分を  $(P, Q, R)$ , 密度を  $q$ , 圧力を  $p$  とするとき, 連続の方程式は次のように表わされる.

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d \cdot qu}{dx}\right) + \left(\frac{d \cdot qv}{dy}\right) + \left(\frac{d \cdot qw}{dz}\right) = 0^{32}$$

この式は現代的表記を用いると,  $\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v = 0$  となる.

また加速力の式すなわち流体の運動方程式は,  $x$  成分に関しては

$$\begin{aligned} P - \frac{1}{q} \left(\frac{dq}{dt}\right) &= \left(\frac{du}{dt}\right) + u \left(\frac{du}{dx}\right) + v \left(\frac{du}{dy}\right) + w \left(\frac{du}{dz}\right) \\ Q - \frac{1}{q} \left(\frac{dq}{dt}\right) &= \left(\frac{dv}{dt}\right) + u \left(\frac{dv}{dx}\right) + v \left(\frac{dv}{dy}\right) + w \left(\frac{dv}{dz}\right) \\ R - \frac{1}{q} \left(\frac{dq}{dt}\right) &= \left(\frac{dw}{dt}\right) + u \left(\frac{dw}{dx}\right) + v \left(\frac{dw}{dy}\right) + w \left(\frac{dw}{dz}\right)^{33} \end{aligned}$$

となり, 現代的表記では  $f - \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v$  である.

この「オイラーの方程式」は適用範囲が限定されたものであるとしても, ここで初めて流体力学の近代的理論が姿を表わしたとすることができよう.

上の方程式が空間上に固定された一点における流体の状態 (速度や圧力, 密度) の時間変化を追うことから「空間表示」と呼ばれるのに対して, それに対をなすものとして「物質表示」がある. それは流体を構成する粒子に着目し, その流体粒子が時間とともにどのように運動していくかを追跡する方法がある. 注目する流体の微小部分の座標  $(x, y, z)$  は, その最初の時刻の座標  $(a, b, c)$  と時間  $(t)$  の関数となる. たとえば  $x$  座標については  $x(a, b, c, t)$  である. この「物質表示」は通常ラグランジュに帰されており, 「空間表示」が「オイラー表示」と呼ばれるのに対し, 「ラグランジュ表示」と呼ばれている. しかしこの「物質表示」を最初に提案したのはラグランジュではなく, オイラーであることがわかっている. オイラーは「川の運

<sup>31</sup> 公刊は後になったが, それらに先だってラテン語論文「流体の運動の原理」 ("Principia motus fluidorum", 執筆 1752 年, 出版 1761 年) が著わされており, そこではすでに連続の方程式や「オイラーの方程式」が論じられている.

<sup>32</sup> Euler 1757, p.63.

<sup>33</sup> Euler 1757, p.65.

動についての研究」(“Recherches sur le mouvement des rivières”, 発表 1751 年, 刊行 1767 年)と「音の伝播について」(“De la propagation du son”, 発表 1759 年, 刊行 1766 年)において触れており, ラグランジュは「音の本性と伝播に関する研究」(“Recherche sur la nature, et la propagation du son”, 刊行 1759 年)において用いている<sup>34</sup>. そしてラグランジュは, 「ラグランジュ表現」によって, オイラーの「運動方程式」を書き換える試みを「動力学の様々な問題の解法への, 先の紀要において提示された方法の適用」(“Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différens problèmes de dynamique”, 発表 1760-1 年, 刊行 1762 年)において行なったのだった<sup>35</sup>.

・本稿は, 研究費 (20500873) の助成を受けたものである.

## 参考文献

- Aiton, E. J. 1972. *The Vortex Theory of Planetary Motion*. New York: American Elsevier.
- . 1998. The Contributions of Isaac Newton, Johann Bernoulli and Jakob Hermann to the Inverse Problem of Central Forces. *Studia Leibnitiana Sonderheft*, 17: 48–59.
- Bernoulli, Daniel. 1726 (1728). Examen principiorum mechanicae, et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium. *Commentarii Academiae Societarum Imperialis Petropolitanae* 1: 126–142. In *Die Werke von Daniel Bernoulli*, Bd.3: Mechanik, Basel, 1987, 119–135.
- . 1736 (1741). De legibus quibusdam mechanicis. *Commentarii Academiae Societarum Imperialis Petropolitanae* (. In *Die Werke von Daniel Bernoulli*, Bd.5: Hydrodynamik II, Basel, 2002, pp.425–444) 8: 99–127. In *Die Werke von Daniel Bernoulli*, Bd.5: Hydrodynamik II, Basel, 2002, 425–444.
- . 1738. *Hydrodynamica*. In *Die Werke von Daniel Bernoulli*, Bd.5: Hydrodynamik II, Basel, 2002, 91–424.
- Bernoulli, Daniel and Johann. 1968. *Hydrodynamics and Hydraulics*. tr. by T. Carmody and H. Kobus. New York: Dover.

<sup>34</sup> ラグランジュがオイラーの研究を知っていたことは書簡から確認できる. Truesdell 1954, pp.CXIX–CXX.

<sup>35</sup> Ibid., p.CXXIV.

- Bernoulli, Johann. 1742a. Discours sur les loix de la communication du mouvement. In *Opera omnia*, pp. 1–107.
- Bernoulli, Johannes. 1742b. *Hydraulica, nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentis pure mechanicis*. In *Opera omnia*, Vol. 4, pp. 387–493.
- Blay, Michel. 1992. *La naissance de la mécanique analytique. La science du mouvement au tournant des XVIIe et XVIIIe siècles*. Paris: PUF.
- . 2002. *La science du mouvement : de Galilée à Lagrange*. Paris: Belin.
- . 2007. *La Science du mouvement des eaux*. Paris: Belin.
- Calero, Julián Simón. 2008. *The Genesis of Fluid Mechanics, 1640-1780*. Dordrecht: Springer.
- Darrigol, Oliver. 2005. *Worlds of flow: A History of Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*. Oxford: Oxford University Press.
- Densmore, D. 2003. *Newton's Principia: the Central Argument*. Santa Fe: Green Lion Press.
- Euler, Leonhard. 1736. *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*. in *Opera omnia*, Ser.2, Vol.1, Lausanne.
- . 1747 (1749). Recherches sur le mouvement des corps celestes en general. *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin* 3: 93–143, *Opera omnia*, Ser.2, Vol.5, Lausanne, 1–44.
- . 1755 (1757). Principes généraux du mouvement des fluides. *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin* 11: 93–143, *Opera omnia*, Ser.2, Vol.12, Lausanne, 54–91.
- . 1761. Principia Motus Fluidorum. *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* pp. 271–311. In *Opera omnia*, Ser.2, Vol.12, Lausanne, 133–168.
- Grattan-Guinness, Ivor. 2000. Daniel Bernoulli and the Varieties of Mechanics in the 18th Century. *Nieuw Archief voor Wiskunde* 1: 242–249.
- Guicciardini, Niccolò. 1995. Johann Bernoulli, John Keill and the Inverse Problem of Central Force. *Annals of Science* 52: 537–575.
- . 1999. *Reading the Principia: the Debate on Newton's Mathematical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736*. Cambridge: Cambridge University Press.

- Maffioli, Cesare. 1994. *Out of Galileo: the Science of Waters 1628-1718*. Rotterdam: Erasmus Publishing.
- Maltese, Giulio. 1992. *La storia di  $f=ma$  : la seconda legge del moto nel XVIII secolo*. Firenze: Olschki.
- . 2001. *Da  $f=ma$  alle leggi cardinali del moto : lo sviluppo della tradizione newtoniana nella meccanica del '700*. Milano: Hoepli.
- Newton, Isaac. 1999. *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*. tr. by I. B. Cohen and A. Whitman. Berkeley: University of California Press.
- Tokaty, G. A. 1994. *A History and History of Fluid Mechanics*. New York: Dover. [repr. of 1641 version]
- Truesdell, Clifford. 1954. Rational Fluid Mechanics, 1657-1765, in L. Euler, *Opera omnia*, Ser.2, Vol.12., pp. IXX–CXXV.
- . 1955. Rational Fluid Mechanics, 1765-1786, in L. Euler, *Opera omnia*, Ser.2, Vol.13., pp. LXXII–CII.
- . 1968. *Essays in the History of Mechanics*. Berlin: Springer.
- Varignon, Pierre. 1703. Manière générale de déterminer les forces, les vitesses, les espaces, et les tems. *Mémoires de l'académie royale des sciences de Paris* 30 Janvier 1700: 22–27.
- 有賀暢迪. 2009 年. 「活力論争とは何だったのか」『科学哲学科学史研究』第 3 卷, 39–57 頁.
- 伊藤和行. 2006 年. 「オイラーの運動方程式」『科学哲学科学史研究』第 1 卷, 153–169 頁.
- . 2010 年. 「ヨハン・ベルヌーイ『水力学』における運動方程式」『科学哲学科学史研究』第 4 卷, 115–126 頁.
- カツツ. 2005 年. 『数学の歴史』上野健爾・三浦伸夫監訳. 東京: 共立出版.
- ガリレオ・ガリレイ. 1985 年. 『新科学論議』, 伊藤俊太郎『人類の知的遺産 31 ガリレオ』所収. 東京: 講談社.
- 羽片俊夫. 1994 年. 「ガリレオ派の流水論—カステッリの『流水の尺度について』」『ルネサンス研究』第 2 卷, 57–79 頁.
- 広重徹. 1968 年. 『物理学の歴史』東京: 培風館.
- 山本義隆. 1997 年. 『古典力学の形成』現代数学社.